Extrait du Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques

http://revue.sesamath.net/spip.php?article499

Prise en main de GeoGebra 3D

- N°34 - mars 2013 -

Date de mise en ligne : dimanche 3 mars 2013

Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques

NDLR : Les liens de téléchargement proposés ci-dessous sont provisoires. Une version installable numérotée 5.0 est annoncée dans les mois qui viennent. GeoGebra 5.0 ne sera pas seulement innovant en 3D, il aura également une console Python, et des algorithmes de démonstration automatique de théorèmes de géométrie.

Autres articles de Jean-Philippe Vanroyen

Introduction

Bien qu'il propose trois activités de géométrie dans l'espace, que les élèves pourront traiter en salle informatique, ou que le professeur pourrait utiliser en classe comme support, cet article reste toutefois très technique.
Son objectif est simple : permettre une prise en main rapide de GeoGebra **4.9**, ce dernier offrant un module 3D. Il s'agit donc de donner les clefs nécessaires pour commencer à travailler. Bien entendu, rien ne remplacera de toute façon le travail sur le logiciel... Ces clefs ne sont donc là que pour faciliter l'apprentissage de la maîtrise du module 3D, et les activités ne constituent que des exemples afin de donner quelques idées.
Ensuite c'est au lecteur de jouer !

Je n'ai pas eu l'occasion d'utiliser cette de Geogebra avec les l'élèves, cette version n'existant pas encore. J'utilisais GeoSpace. Lors des stages de géométrie dynamique du PAF de l'académie de Lille que j'animais, je proposais trois activités l'utilisant. Sébastien Dumoulard et Fabrice Eudes ayant pris la relève, ont construit la version Geogebra de ces activités et me les ont gentillement fournies. Je les en remercie.

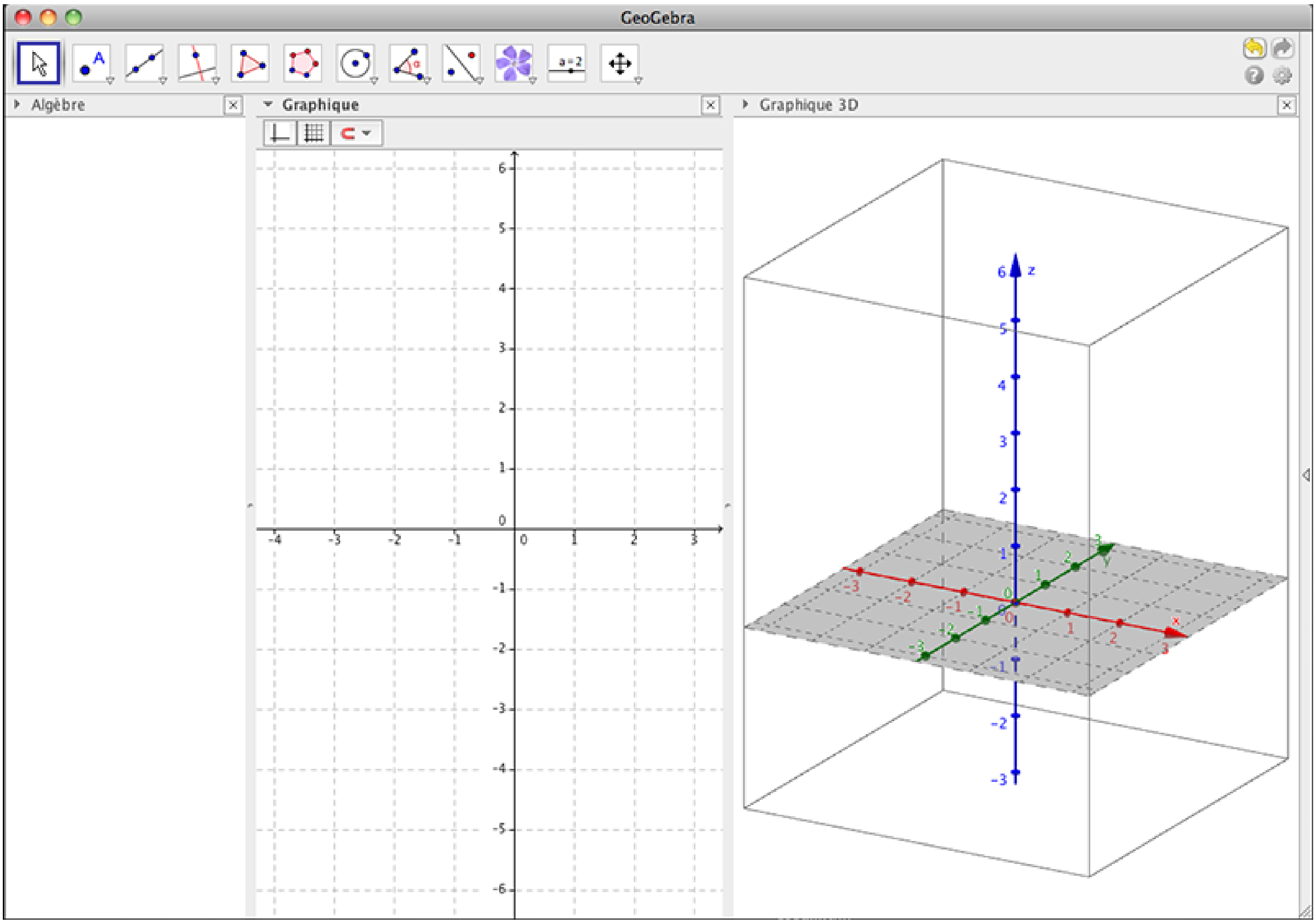
Dans cet article, je considère que le lecteur connaît les bases de Geogebra. Si ce n'est pas le cas, vous trouverez sur le net de nombreux tutoriels dédiés.
Enfin, voici l'adresse que j'ai utilisée pour installer la version 5 sur ma machine :
https://code.google.com/p/geogebra/...

Cet article comporte trois parties :
- une présentation de quelques notions importantes de la fenêtre 3D de GGB5.
- une construction de section de prisme, utilisable en vidéo-projection.
- une activité sur l'étude de l'aire de la section d'une pyramide (tirée d'un ancien problème du brevet des collèges).
- une activité portant sur le thème des règles d'incidence.

Principes importants

Fenêtres 2D et 3D

Au lancement de GGB, nous obtenons classiquement les deux fenêtres algèbre et graphique.
Ajoutons, à l'aide du menu Affichage, la fenêtre Graphique3D afin d'obtenir l'espace de travail suivant :

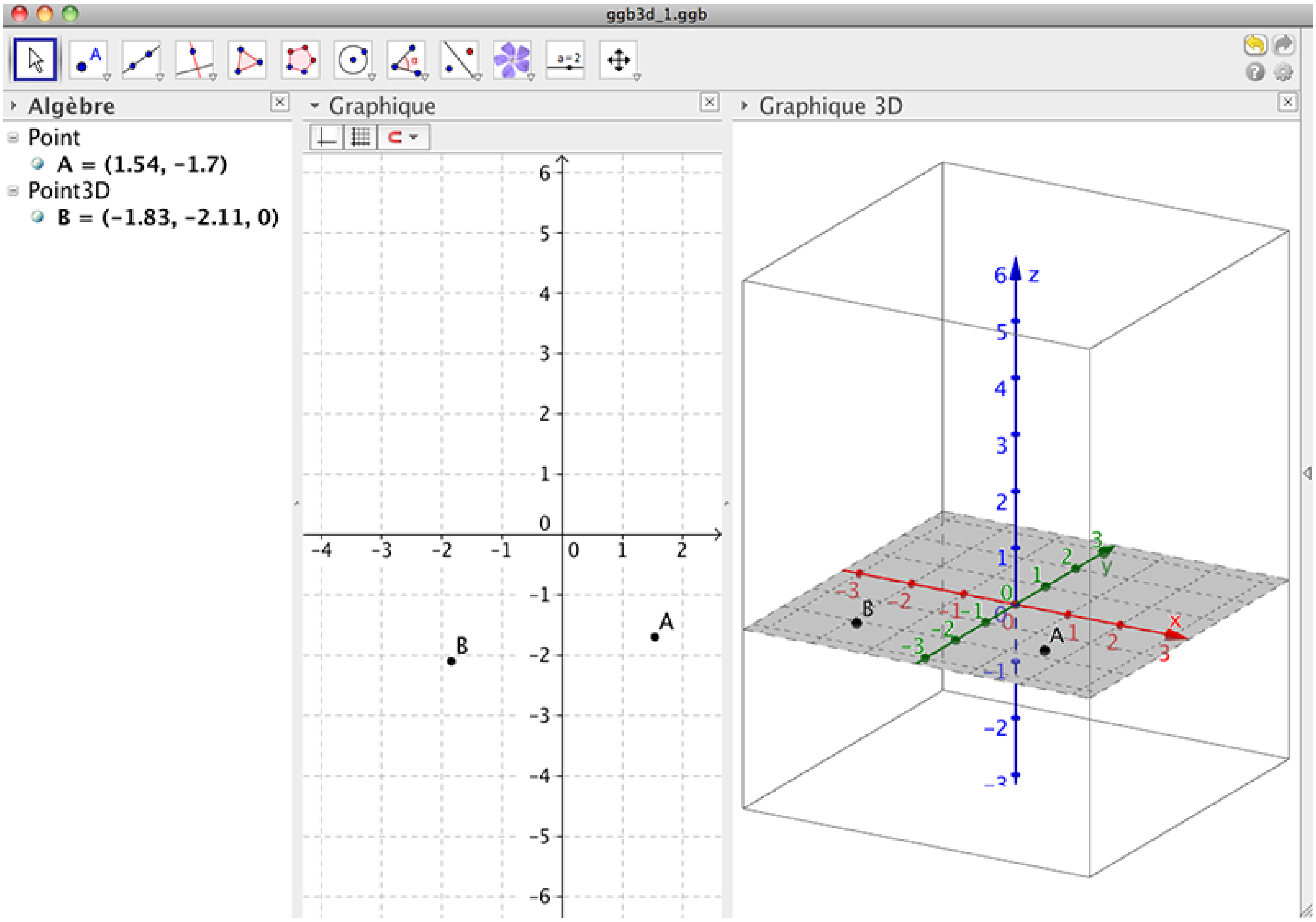


La fenêtre 3D n'est pas vide : elle contient un repère 3D gradué. Le plan (xOy) est également grisé. Ce plan (xOy) est le plan de la figure 2D. Ansi, toute construction d'un objet dans la fenêtre 2D fera apparaître l'objet dans la fenêtre 3D, et réciproquement.

Prenons par exemple le cas de la construction d'un point.

- Si on construit un point A dans le graphique 2D, et qu'on le déplace, alors il apparaîtra et se déplacera également dans le graphique 3D, plus précisément dans le plan (xOy).

- Si on construit un point B dans le graphique 3D, alors GGB le placera par défaut dans le plan (xOy) puisqu'il faut bien décider d'une cote pour ce point, et il apparaîtra également dans le graphique 2D.

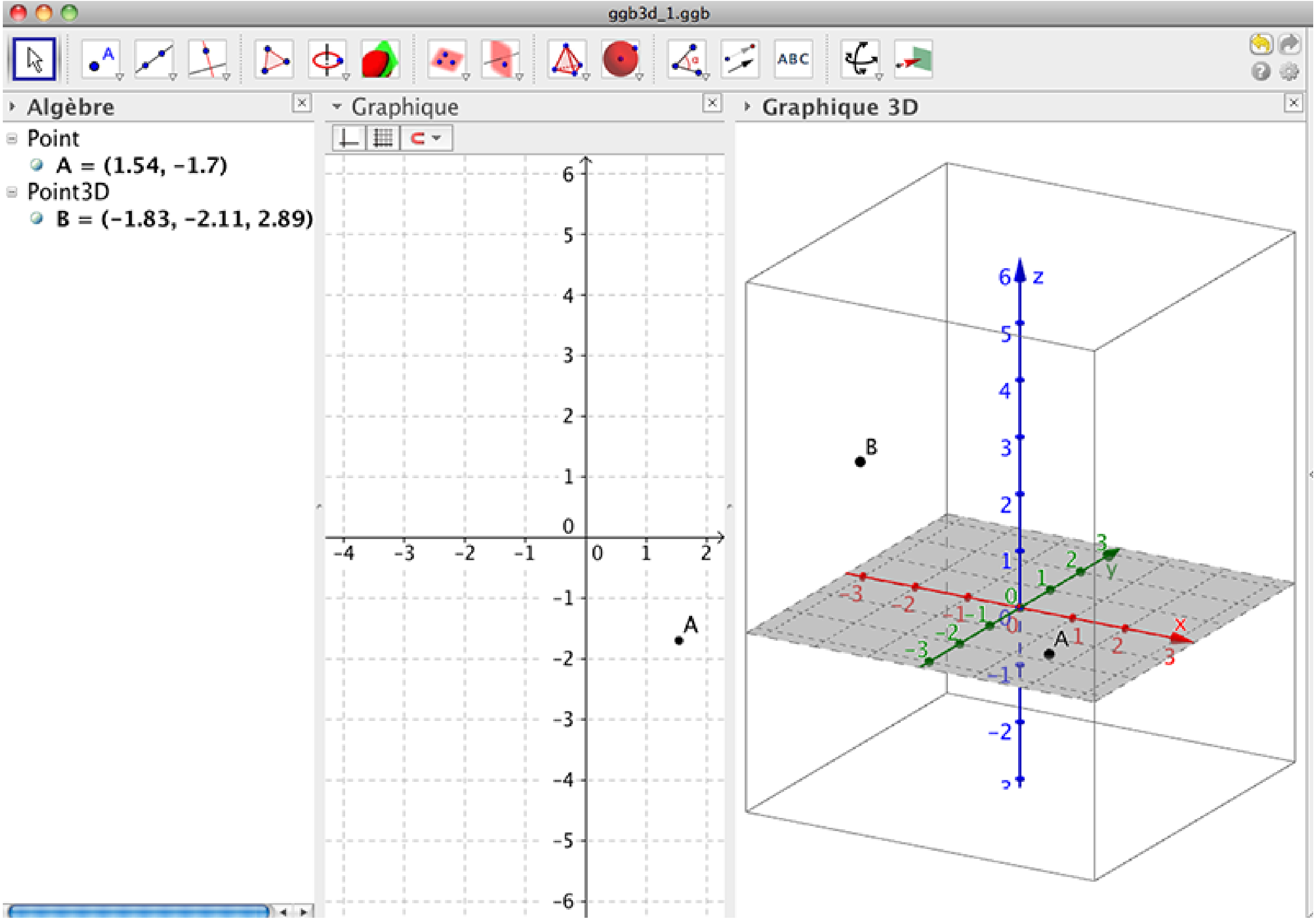


Néanmoins, il y a une différence sensible entre ces deux constructions.
Dans la fenêtre Algèbre, on voit que A a deux coordonnées alors que B en a trois. En réalité A en a trois également (la cote est nulle) mais l'affichage de deux coordonnées est systématique quand on travaille dans la fenêtre 2D. D'ailleurs, dans la fenêtre Algèbre, A est défini par GGB comme point 2D alors que B est défini comme point 3D.

Mais il y a une différence plus subtile entre ces deux constructions.
Une fois ces points construits, on peut les déplacer librement, du moins dans le plan (xOy). Le point A a été construit dans la fenêtre 2D, c'est donc un point appartenant à (xOy) : c'est un point **sur_un_objet**. En tant que tel, il est définitivement condamné à errer dans ce plan (à moins évidemment de le redéfinir).
Mais il n'en est pas de même pour le point B . Ce dernier a certes été placé dans le plan (xOy), mais ce placement a été effectué par défaut car il faut bien décider de la valeur de sa cote, en l'occurrence nulle par défaut. C'est pourquoi, le changement de l'altitude (la cote) du point A est impossible dans la fenêtre 3D, alors que le changement de la cote de B lui est possible.

Cela dit, le déplacement à la souris de B dans la fenêtre 3D ne provoque qu'un déplacement dans le plan (xOy). Toutefois, en cliquant successivement sur le point B, le curseur change d'apparence une fois sur deux. Successivement, on obtient un curseur induisant un déplacement dans (xOy) et un curseur permettant une modification de sa cote, c'est à dire un déplacement sur la perpendiculaire à (xOy) passant par B.

Ci-dessous j'ai augmenté la cote de B. On remarquera que le point B n'apparaît évidemment plus dans la figure 2D :



La zone de saisie

Si elle n'est pas affichée, menu Affichage, Champ de saisie.

Cette zone est toujours aussi efficace. Par exemple,

C = (1,3)

provoque l'apparition de C dans les deux fenêtres.

D=(-2,2,2)

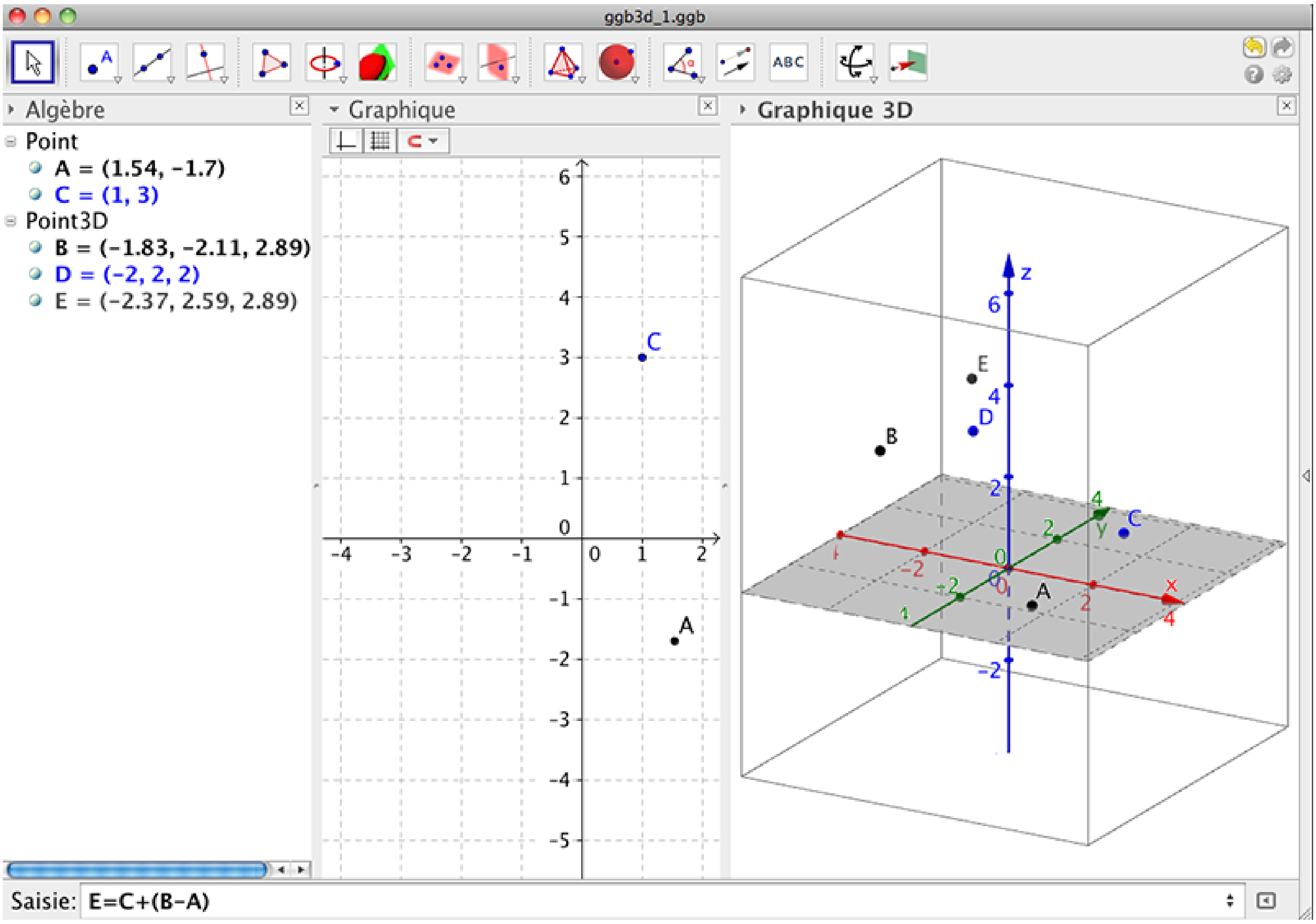
également.

Plus amusant,

E=C+(B-A)

donne l''image de C par la translation de vecteur AB.

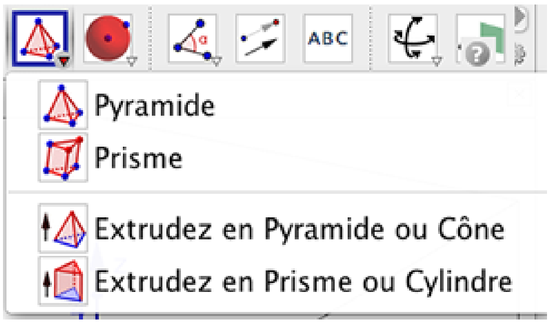
Cela s'explique par le fait que, pour GeoGebra, B-A est le vecteur AB et par le fait que M = A + u donne l''image de A par la translation de vecteur u.

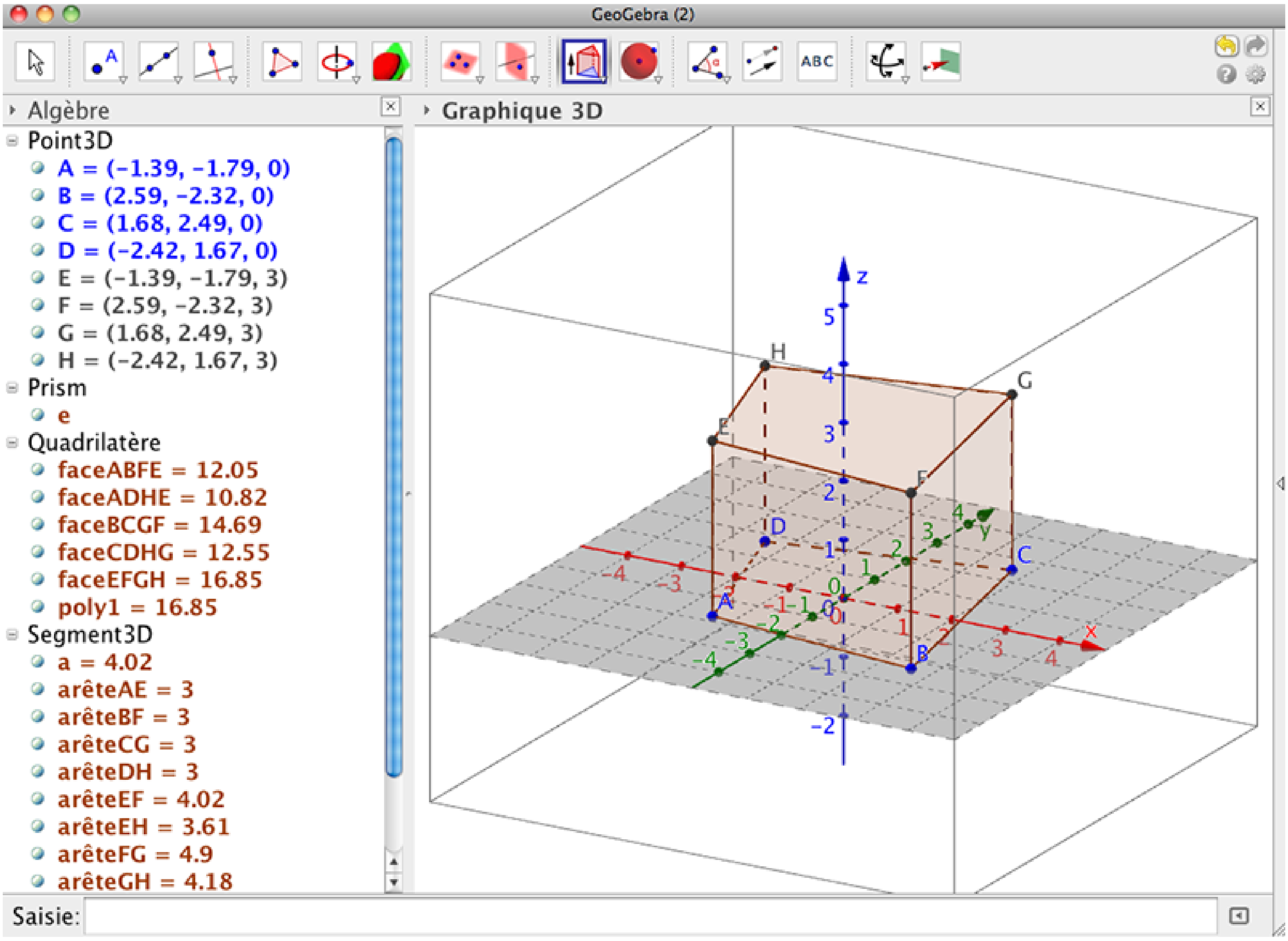


Le petit bouton en bas à droite en forme de flèche affiche toutes les commandes. Sans parler de la mise en forme des objets, il est possible de construire la plupart des figures à l'aide exclusivement de commandes.

Mise en forme et Vues de la fenêtre 3D

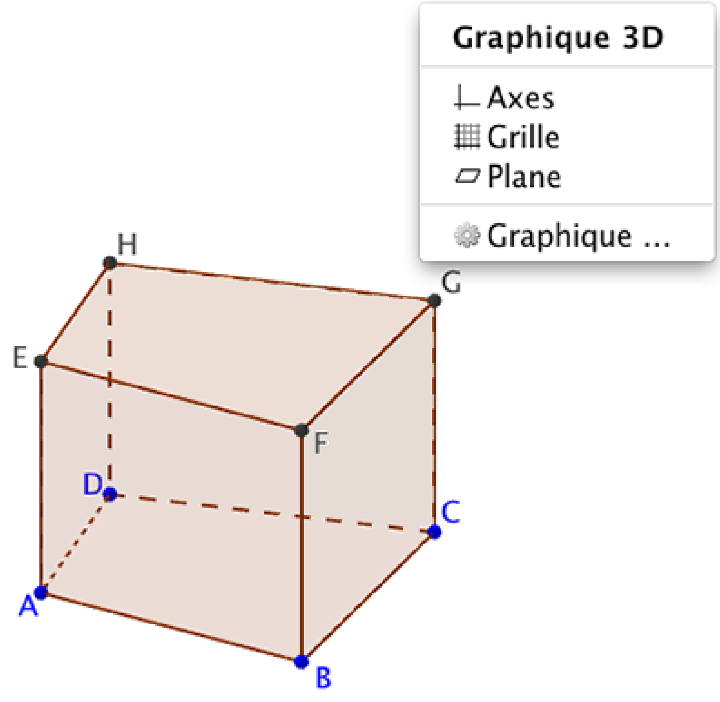
Masquons la fenêtre 2D Affichage-Graphique puis créons 4 points A,B,C,D dans la fenêtre 3D. Ces points sont placés par défaut dans le plan (xOy). Créons le polygone ABCD.
A l'aide du bouton Extrudez en prisme, créons le prisme ABCDEFGH (cliquez sur le polygone puis comme hauteur choisissez 3 par exemple).



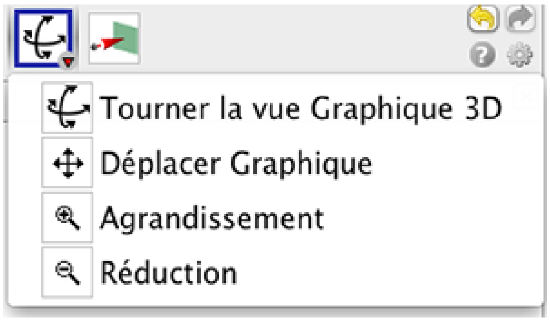


La figure est peu lisible.

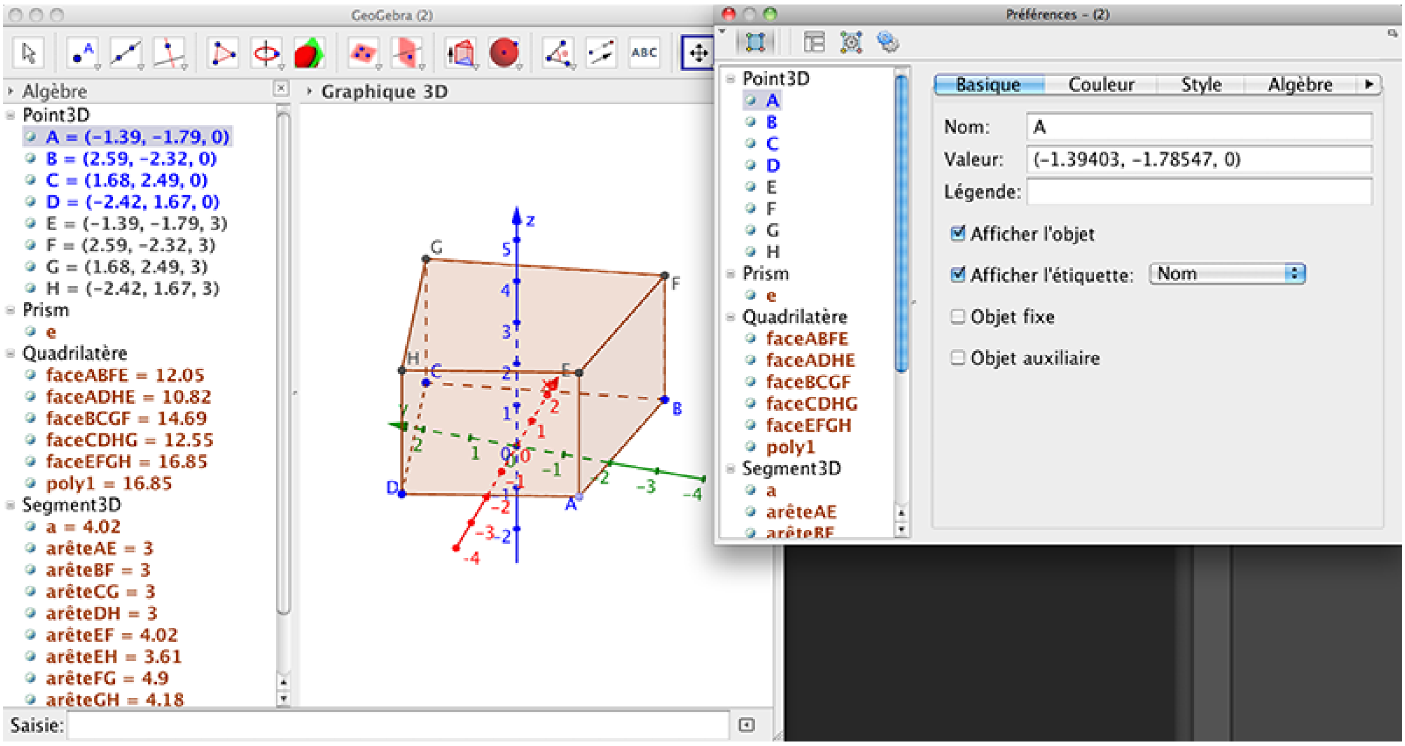
Le clic du bouton droit de la souris dans la fenêtre 3D (dans un espace vide) fait apparaître un menu contextuel. Nous allons décider de garder les axes, de masquer les graduations et de ne pas avoir le plan (xOy). Pour cela, décochez Plane, grille et Axes dans le menu contextuel. A noter que le sous-menu Graphique.. permet une paramétrisation plus poussée. Par exemple, dans l'onglet Basique on peut décocher ShowClipping afin de masquer le prisme gris foncé. On obtient alors ceci :



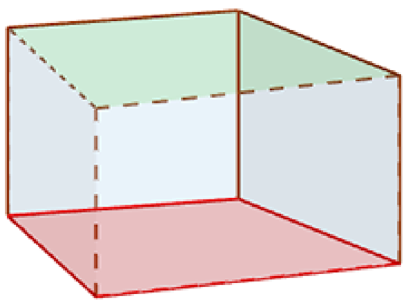
Pour changer de vue 3D (pour déplacer la caméra), on utilise les boutons Tourner la vue graphique 3D et Déplacer Graphique.



Le bouton Déplacer permet de translater le repère 3D. Le bouton Tourner permet de pivoter la figure autour de la l'axe (Ox) ou (Oz).
 Avant de proposer une vue de dessous, nous allons colorier les faces. **Un grand principe dans GGB est de s"occuper de la mise en forme à la fin de la construction de la figure, en utilisant la fenêtre de mise en forme.** Pour la faire apparaître, il suffit de cliquer à l'aide du bouton droit sur un objet quelconque. On obtient alors la fenêtre suivante :



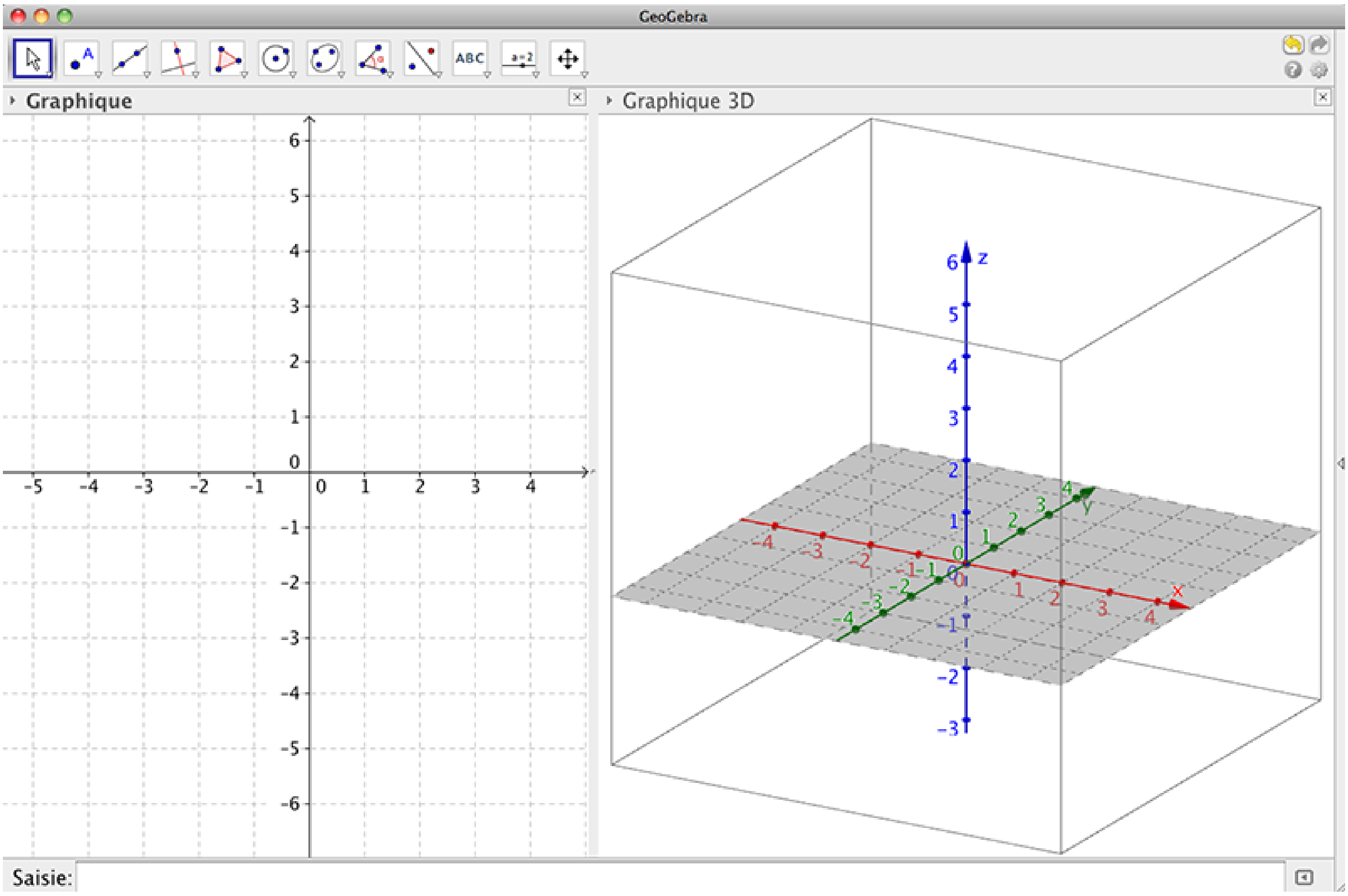
Comme vous le constatez, tous les objets sont listés dans le volet gauche de la fenêtre. Il suffit de sélectionner l'un d'eux puis de changer son style. Il est également possible, et c'est très pratique, de sélectionner plusieurs objets à l'aide de la touche shift ou ctrl, puis de régler le style des tous les objets sélectionnés. Avec cette technique, choisissons pour couleur de ABCD le rouge et pour couleur de EFGH le vert, et pour les faces lattérales le gris. En outre, pour toutes les faces, je choisis une opacité égale à 25. Masquons enfin tous les points. Enfin, *regardons* par en-dessous :



Comme vous pouvez le constater, le seul élément indiquant qu'il s'agit d'une vue de dessous est le tracé des pontillés !

++++ Section de prisme droit

Nous allons partir de la configuration suivante :

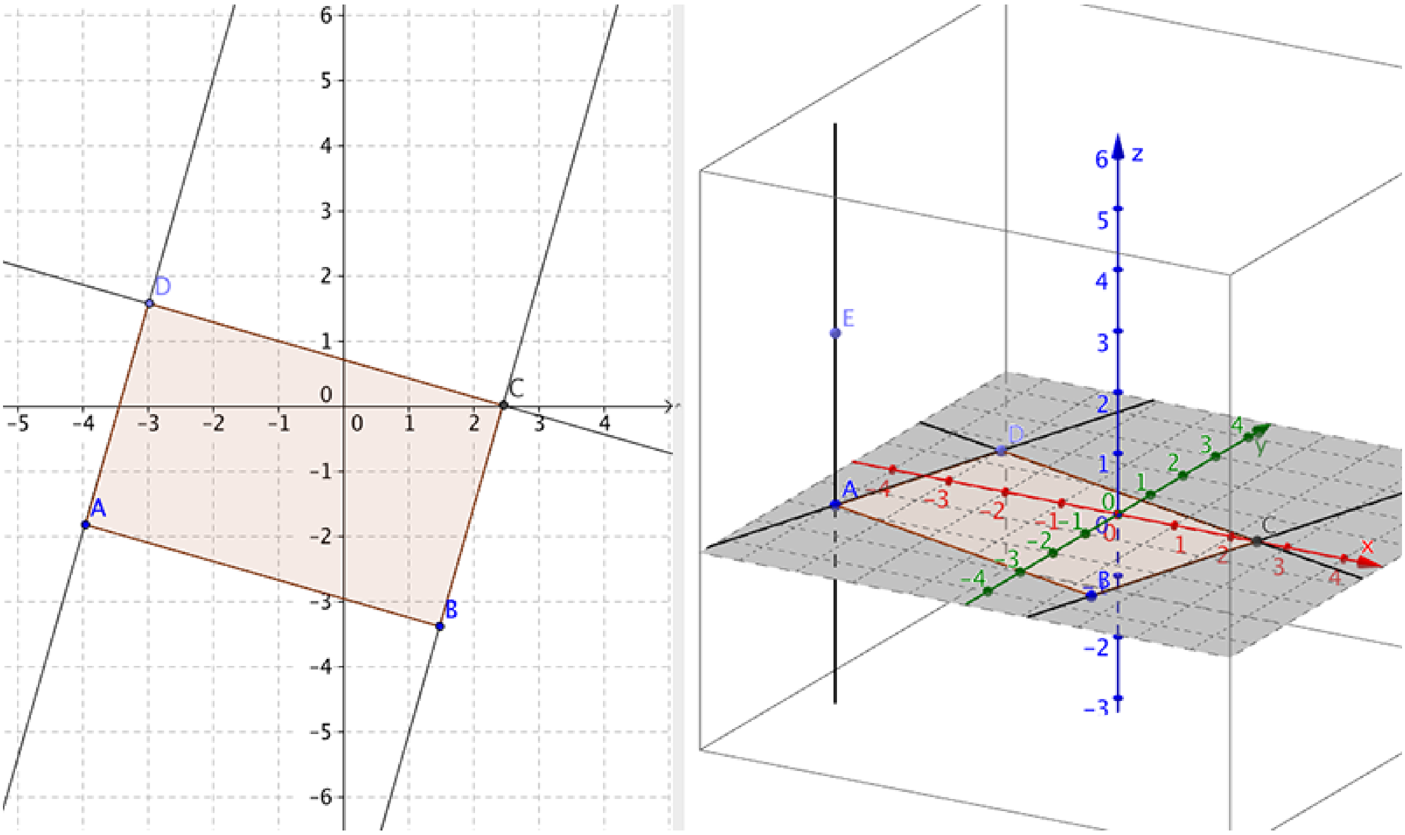


A l'aide du menu Affichage, la fenêtre Analyse a été masquée et la fenêtre Graphique 3D affichée. En outre la scène a été organisée de telle manière que les graduations des axes (Ox) et (Oy) soient semblables dans les deux fenêtres.

Pour créer un prisme on pourrait définir les huit points à l'aide de la zone de saisie : A=(x,y,z). C'est rapide mais le prisme obtenu ne pourra pas être modifié. Nous allons donc procéder autrement.

- Commencez par construire un rectangle ABCD dans la fenêtre 2D, ce rectangle étant défini par un segment [AB] et un point D. Construisez à la fin le polygone ABCD.
- Construire dans la fenêtre 3D, à l'aide de l'outil Droite perpendiculaire la perpendiculaire à ABCD passant par A.
- Construire un point E sur cette perpendiculaire.

On obtient ceci :

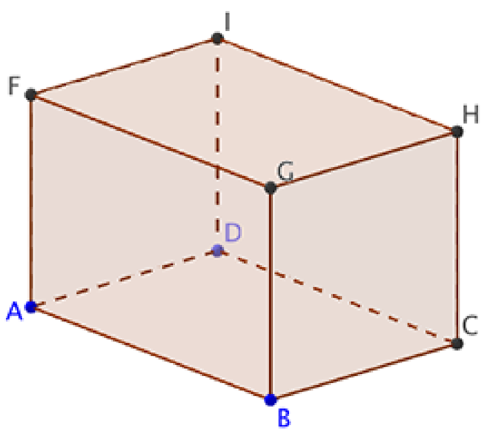


Masquez tous les éléments inutiles, et à l'aide du menu Affichage, fermez la fenêtre 2D.

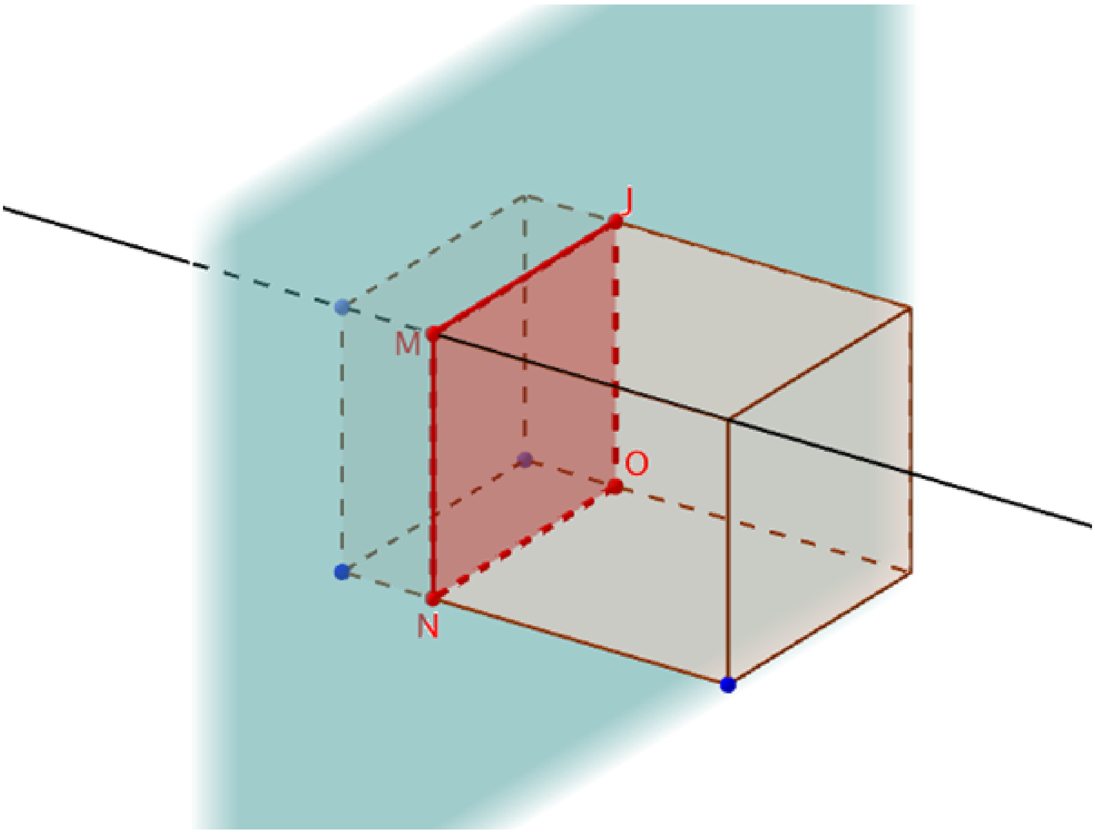
A l'aide de l'outil Extrudez en prisme, construire le prisme ABCDEFGH.
Pour cela cliquez sur ABCD puis quand GGB vous demande la hauteur, entrez : **Distance[A,E]**.

GGB n'a pas intégré le point E dans le prisme. Autrement dit il a créé un point F sur le point E. Mais le point E est utile puisque c'est lui qui nous permettra de modifier la hauteur. On va donc masquer simplement l'étiquette du point E.

Le prisme est construit et peut être redimensionné.

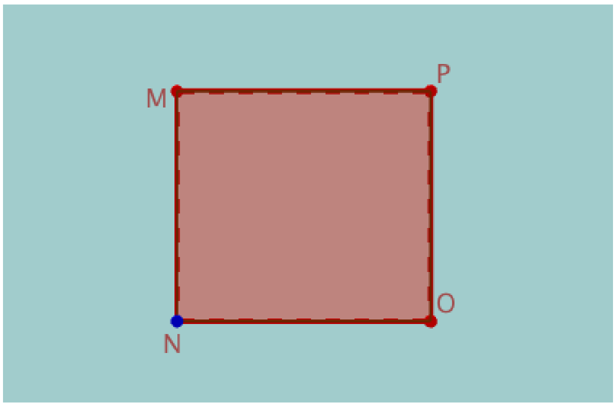


- Construisez la droite (FG) et un point M sur cette droite.
- Construisez le plan perpendiculaire à (FG) et passant par M.
- A l'aide de l'outil Intersection entre deux objets, construisez l'intersection de ce plan et des quatre arêtes afin d'obtenir la section MNOP.
- Construisez le polygone MNOP
- Mettez en forme la figure :



Le point M peut être déplacé hors du prisme puis réintégré afin de faire apparaître subitement la section. Comme on peut déplacer la caméra, et comme on peut redimensionner le cube, on dispose d'un outil de démonstration pour la classe.

Enfin, le bouton Vue de face permet de regarder le cube en fixant une face donnée. Par exemple cliquez sur la face latérale droite, et vous obtiendrez ceci :



CTRL-Z pour revenir à la vue initiale.

En conclusion, selon moi, ces constructions trouvent surtout leur intérêt dans l'illustration en classe des points de cours à l'aide du vidéoprojecteur. Cela dit, pour les sections plus complexes obtenues par un plan non parallèle à une face du prisme, on peut imaginer que l'élève parte d'une figure construite (ou qu'il construit lui-même) et doive ensuite répondre à un ensemble de questions, portant chacune sur une section différente.

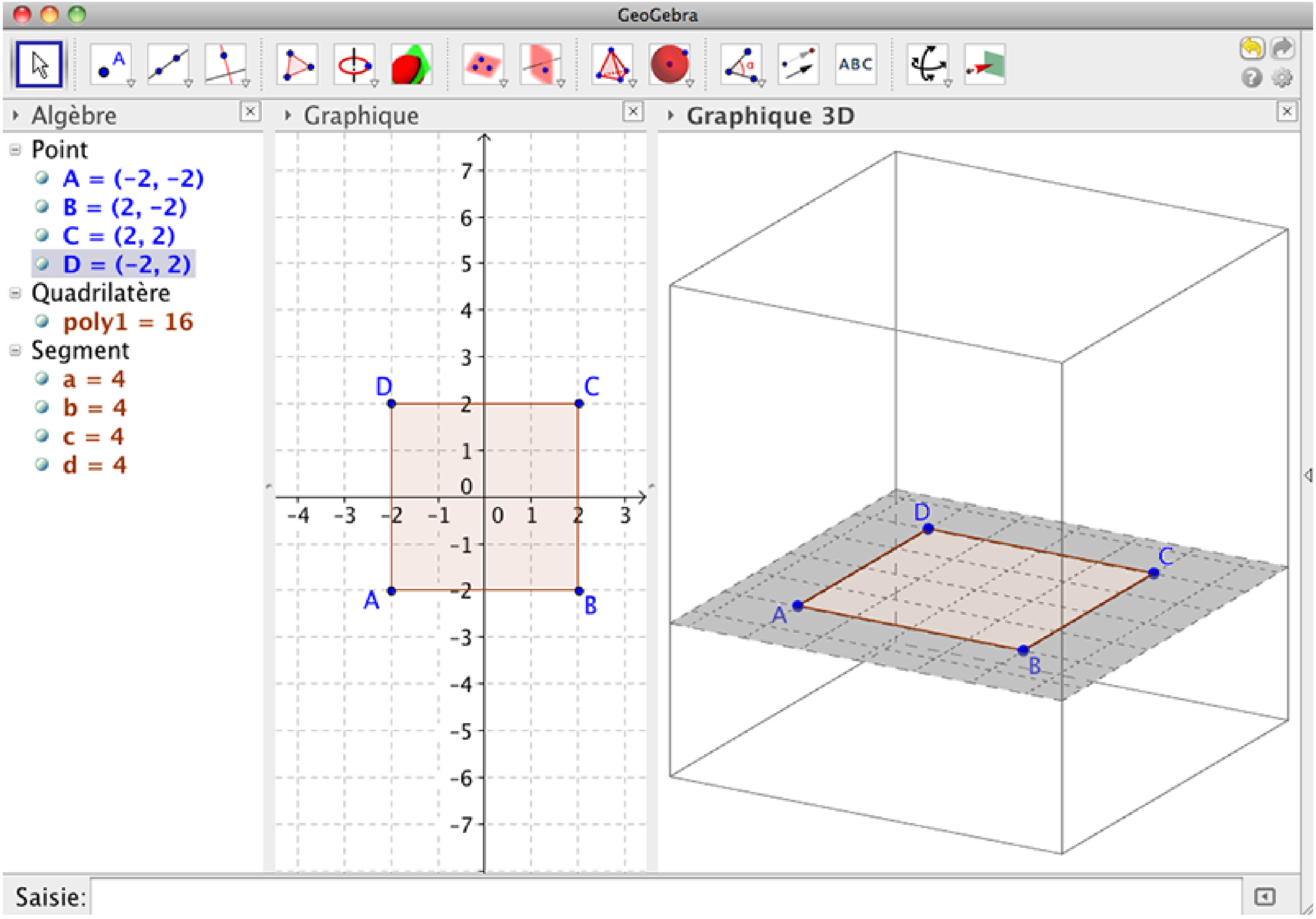
++++ Section d'une pyramide

Soit une pyramide à base carrée ABCD de côté 4 et de hauteur [AS] de longueur 6. M est un point de [AS] et MNOP est la section de la pyramide par un plan parallèle à sa base et passant par M. Le but du problème est l'étude de l'aire de la section en fonction de la longueur SM.

La construction suivante peut être faite par les élèves en salle informatique, mais elle suppose une certaine familiarisation avec le logiciel.

On peut évidemment aussi l'utiliser lors de la correction en classe de l'exercice.
Dans ce cas, un compromis intéressant serait de présenter le problème aux élèves à l'aide la figure 3D, leur faire traiter ce problème, puis lors de la correction, revenir sur la figure complète afin d'illustrer la solution du problème.

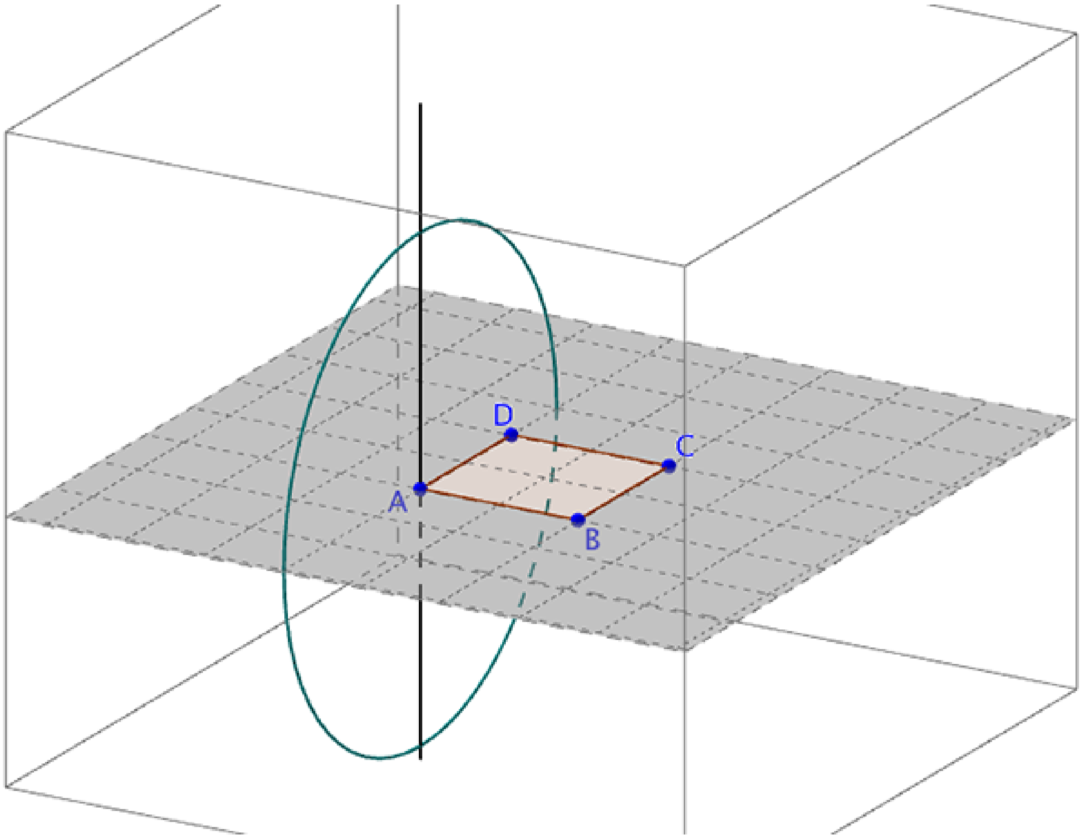
Commençons par créer rapidement un carré ABCD en utilisant la grille de la fenêtre 2D. Fixons les points. C'est donc un carré dans la mesure où les coordonnées des sommets sont particulières et fixées.
Mais on pourrait pu aussi construire géométriquement un carré.



Masquez la fenêtre 2D (menu Affichage).

La pyramide a pour hauteur [AS] et AS = 6. Il faut donc construire d'abord la perpendiculaire à la face ABCD, c'est à dire à (xOy) passant par B. Utilisons pour cela l'outil Droite perpendiculaire, en cliquant successivement sur A et sur le polygone (ou le plan).

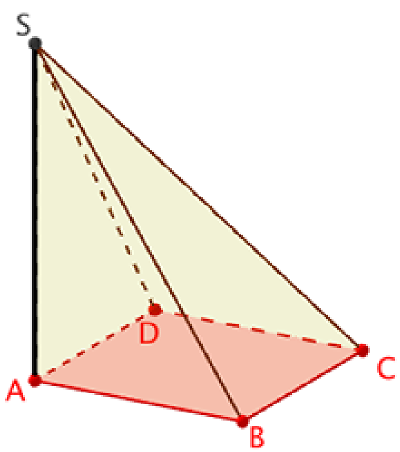
Construisons le cercle d'axe (AB), de centre A et de rayon 6. Pour cela, utilisez le bouton Cercle (centre-rayon-direction. On obtient ceci :



Construire le point S à l'aide du bouton Nouveau point et en désignant précisément l'intersection désirée (à ce moment là, dans la fenêtre analyse, les deux objets créant l'intersection sont en surbrillance).
A l'aide du bouton Pyramide, construire le tétraèdre ABCDS, en désignant successivement le polygone et le sommet S.

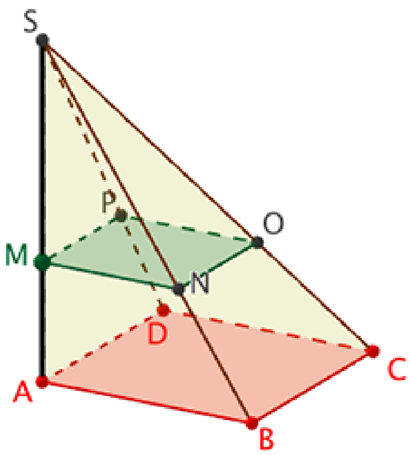
A noter qu'on aurait pu obtenir directement le point S comme ceci :
S = A + (0,0,6)
qui n'est en fait rien d'autre qu'une égalité vectorielle.

Masquez tous les éléments inutiles, colorier la base d'une couleur différente, les points, ainsi que la hauteur [AS] afin d'obtenir ceci :

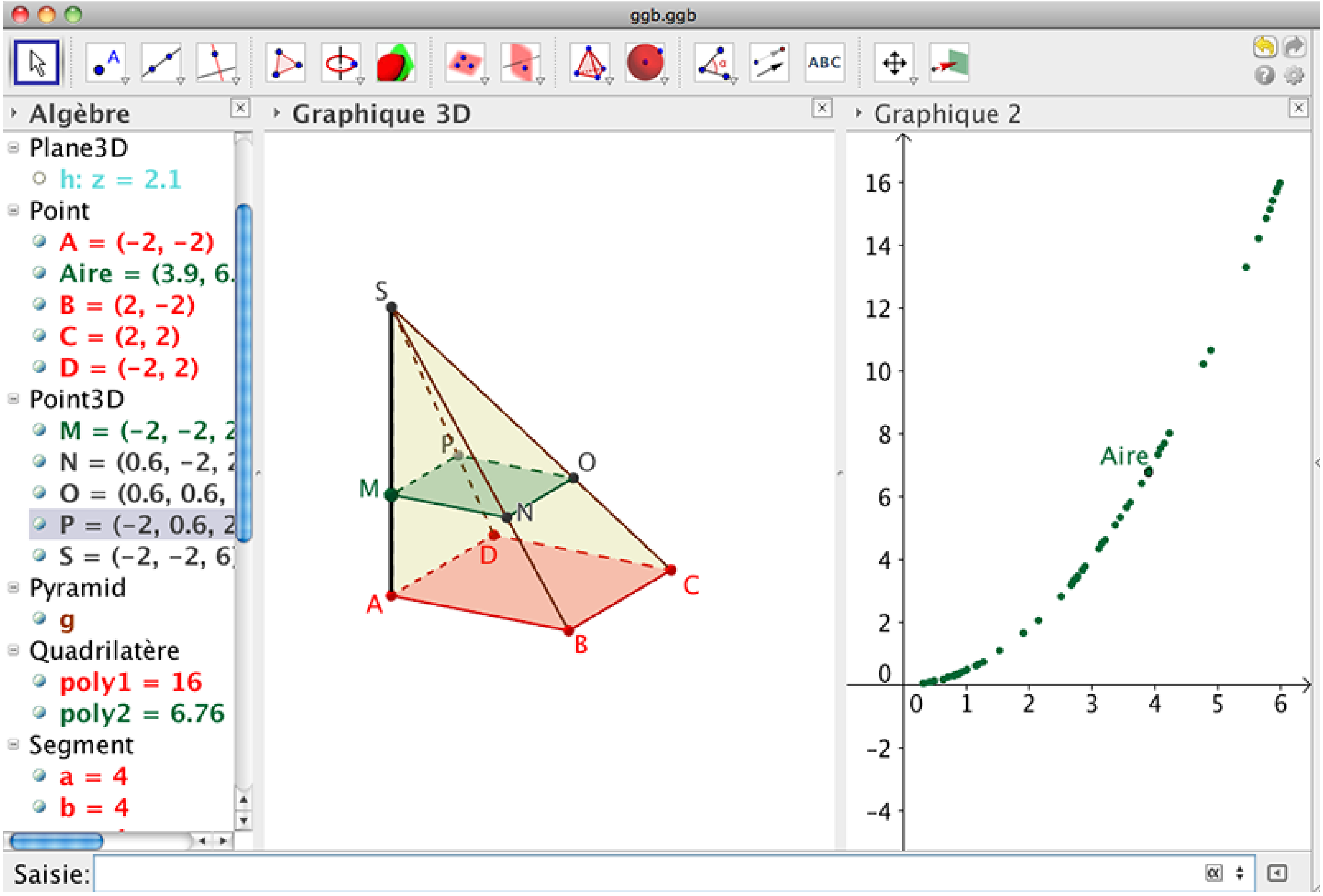


Construisez un point M sur le segment [AS] et construisez le plan passant par M et parallèle à ABCD. Ici, il est fort probable que ABCD ne soit pas accessible par clic puisque la face est en réalité cachée. Pour contourner ce problème, soit vous déplacez la caméra, soit vous cliquez sur l'objet ABCD (**poly1**) dans la fenêtre Algèbre, cette dernière option étant évidemment plus performante.

Il faut maintenant construire la section. Contrairement à GeoSpace, il n'y a pour l'instant aucun bouton donnant immédiatement la section. C'est pourquoi il faut construire successivement les intersections N,O,P du plan avec les arêtes latérales.
Utilisez pour cela le bouton Intersection entre deux objets et utilisez la fenêtre Algèbre pour désigner les arêtes, le plan étant quant à lui étant facilement cliquable.
Masquez le plan et construire le polygone MMNOP de couleur verte afin d'obtenir ceci :



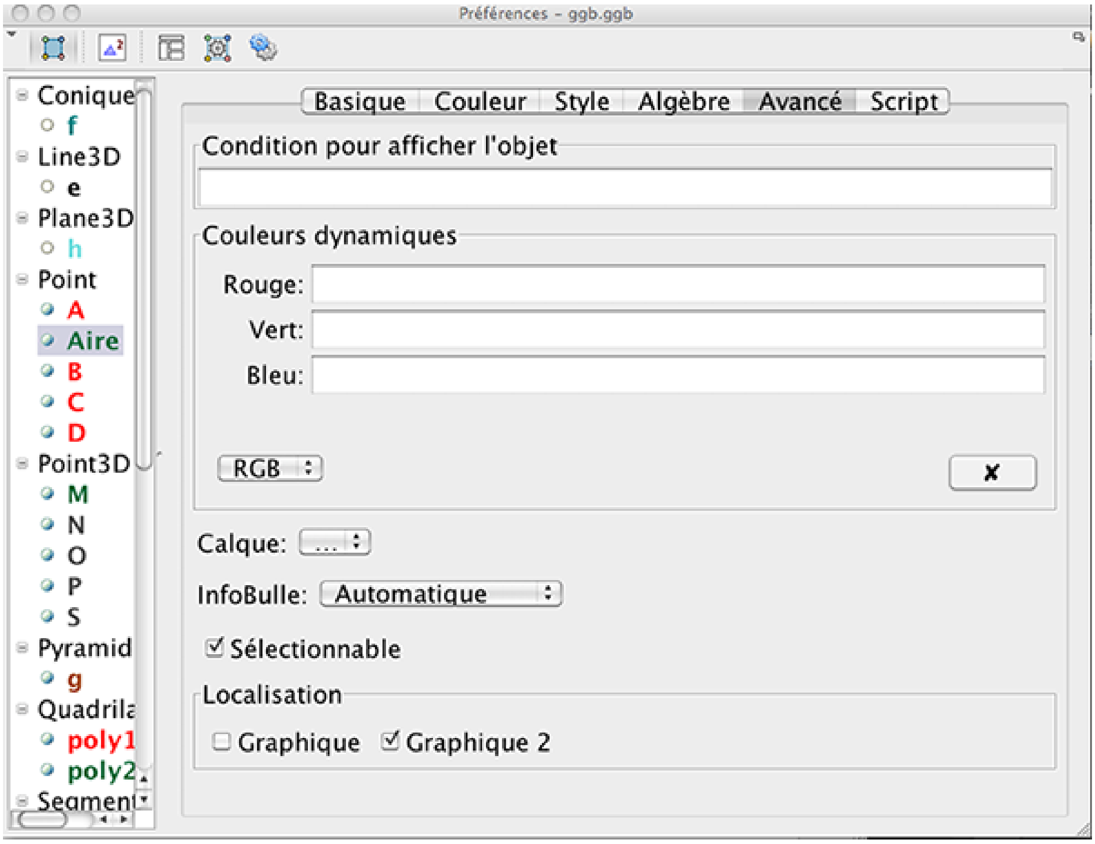
Voici ce que l'on souhaite obtenir maintenant :



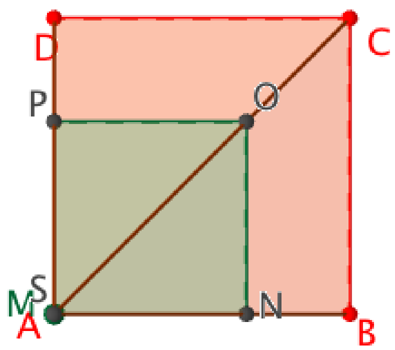
Dans la fenêtre Graphique 2, un point nommé **Aire**, de couleur verte comme la section, a pour coordonnées **(SM ; Aire(MNOP))**.

En effet, on ne peut pas construire un tel point dans la fenêtre 2D, puisqu'il apparaîtrait également dans la fenêtre 3D. Dans le menu Affichage, cliquez sur Graphique 2. Ensuite dans la zone de saisie, **Aire = (Distance[S, M], poly2)** afin de définir le point. Ce point n'apparaît pas dans la fenêtre 3D, mais dans la fenêtre 2D qui est d'ailleurs masquée. Il faut donc affecter ce point à la fenêtre Graphique 2. Pour ce faire, cliquez sur le point **Aire** de la zone Algèbre à l'aide du bouton droit et cliquez sur Propriétés...

Dans l'onglet Avancé, décochez Graphique et cochez Graphique 2. Il suffit ensuite d'activer la trace de ce point :



Enfin terminons cette activité par une vue de dessus de la pyramide. Le dernier bouton de la fenêtre 3D, Vue de face , permet de regarder l'objet dans un direction donnée. Cliquez sur ce bouton et placez le curseur (en forme de flèche de visée) sur l'arête [SA]. Enfin cliquez. Voilà ce que l'on obtient :



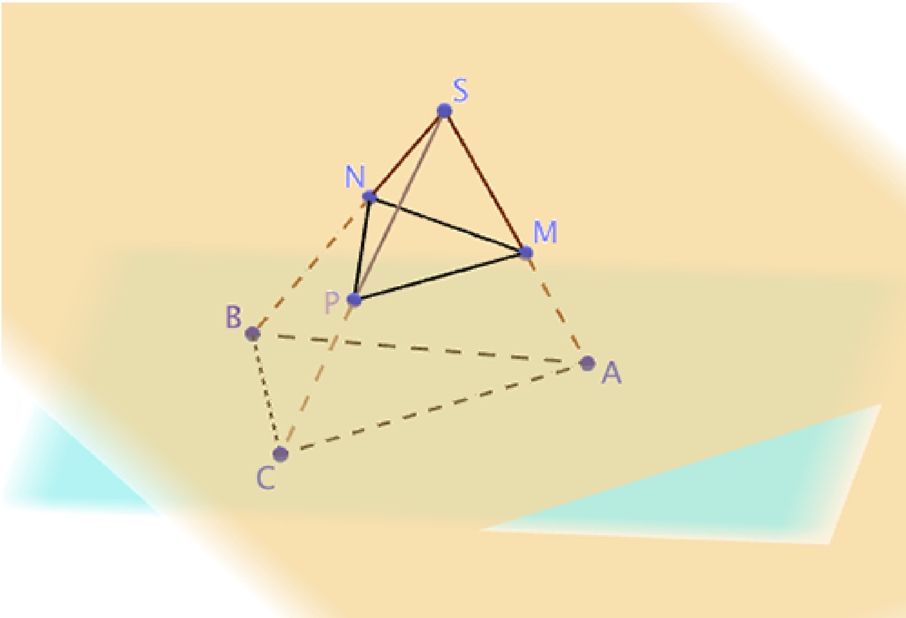
Pour revenir à la vue initiale, il suffit d'annuler la dernière action (CTRL+Z).

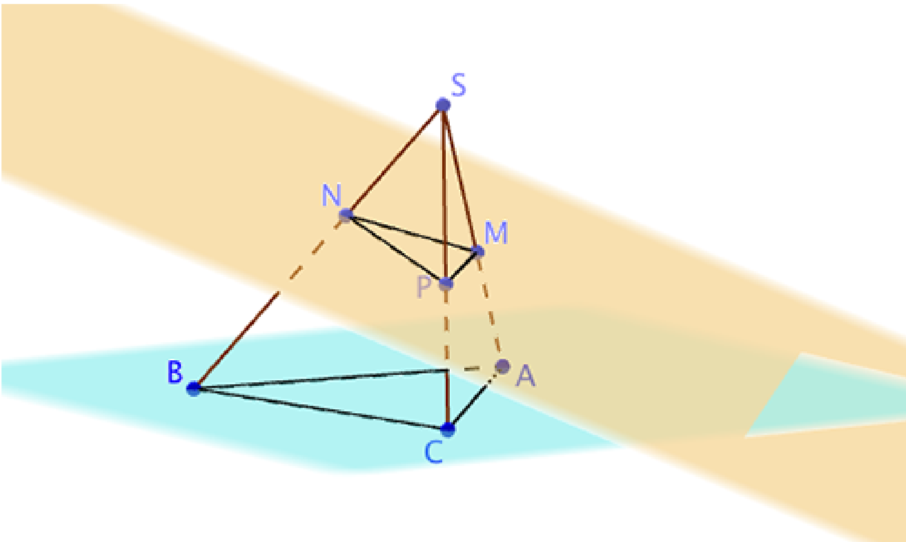
++++ Règles d'incidence

L'objectif de cette activité est d'illustrer les règles d'incidence :

- Dans un plan, deux droites non parallèles se coupent en un point.
- Deux plans sécants se coupent en une droite
- Une droite sécante à un plan coupe ce plan en un seul point.

Pour cela, on partira d'une configuration très classique, celle du tétraèdre avec 3 points sur les arêtes latérales, afin d'étudier et de représenter l'intersection du plan de base avec le plan passant par ces trois points.

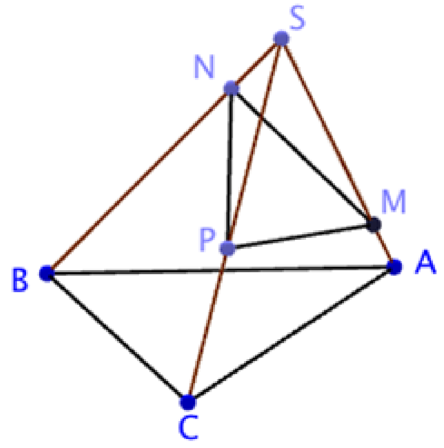




Pour la construction, j'ai construit un polygone ABC dans le graphique 2D, un point S sur l'axe (Oz), la pyramide SABC, un point sur chaque arête, le plan (ABC), le plan (MNP). J'ai également procédé à quelques mises en forme mineures.

Visuellement il est clair que l'intersection des deux plans est une droite. On pourra d'ailleurs rapidement demander à GGB de construire l'intersection des deux plans (bouton *Point - intersection entre deux objets*). Pour l'instant (fev 2013) cela ne fonctionne pas (le module 3D est en version beta). Toutefois, l'intersection est bien visible et cela nous suffira.

Avec les élèves, nous allons partir en fait de la situation suivante, qu'ils construisent sur leur cahier :



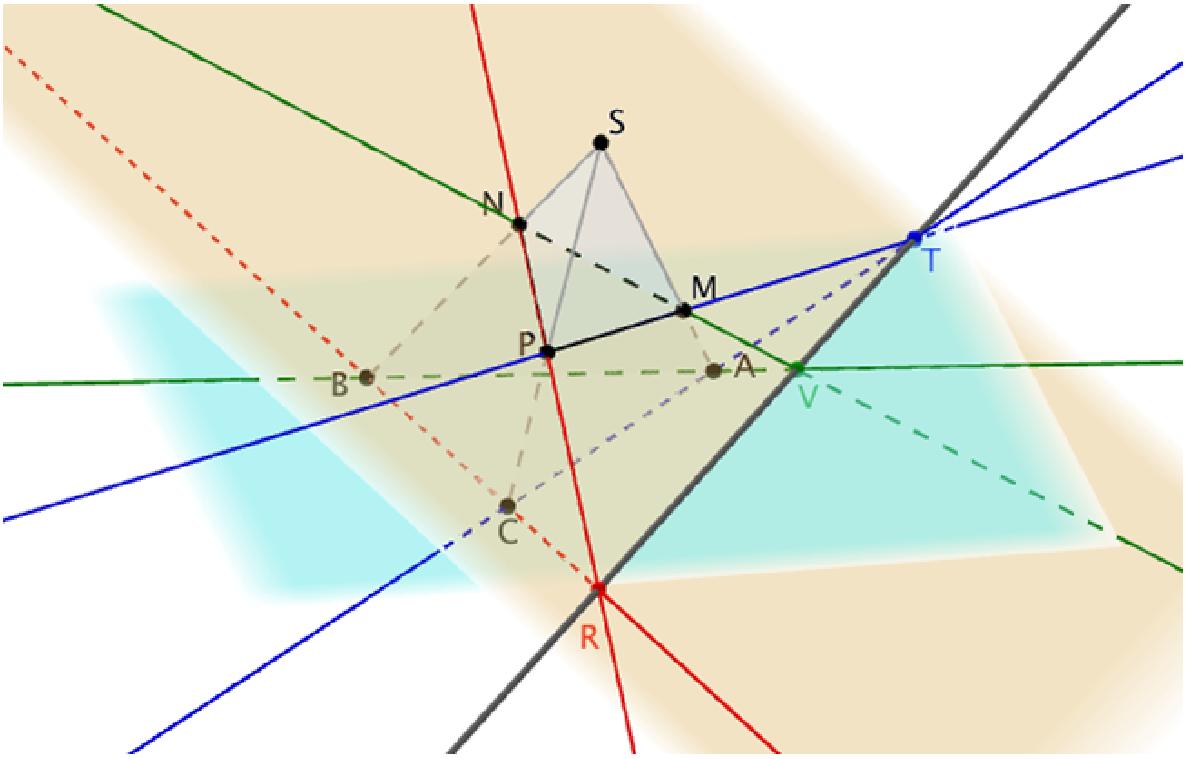
La consigne est : construire en justifiant l'intersection des plans ABC et MNP. Cette situation pourtant simple est en fait assez délicate et déclenche des discussions avec les élèves : le problème réside en effet dans la justification de la construction. Tout d'abord, il y a les élèves qui construisent par exemple l'intersection de deux droites non coplanaires comme MN et AC (dans ce cas, GGB montrera très bien le problème). En outre, si la plupart construisent la droite exacte, il y a cependant trois façon d'y parvenir : en considèrant les intersections BC-NP et MN-AB, ou les intersections BC-NP et PM-AC ou enfin les intersections PM-AC et MN-AB. Or si les élèves ont procédé de manière différente, qu'est-ce qui prouve que la droite obtenue est la même quelle que soit la méthode choisie ?

La clef réside dans les règles d'incidence. Le raisonnement suivant mérite d'être approfondi avec les élèves.

- Tout d'abord d'après la règle 3, l'intersection de deux plans non parallèles est une droite. Pour construire cette intersection éventuelle, il suffit de construire deux points.
- NP et BC ne sont pas parallèles et se coupent en un point R (règle 1). Ce point appartient à NP, donc au plan MNP. Il appartient également à BC, donc au plan ABC. Par conséquent ce point appartient aux deux plans.
- On en déduit d'une part que R appartient à l'intersection de ces deux plans et d'autre part que ces deux plans ne sont pas parallèles.
- Il nous faut un second point pour obtenir la droite. A cette étape, on peut alors choisir indifféremment le point V intersection de MN et AB, ou le point T, intersection de PM et CA.
- La droite d'intersection est la droite passant par les points R,V,T. Ces points sont en effet alignés. Ce qui est tout sauf évident quand on considère la figure initiale.

On aurait d'ailleurs pu faire construire ces trois points et demander de démontrer qu'ils sont alignés.

La figure GGB peut alors offrir une représentation de cette situation :



En guise d'exercice, on pourra demander d'étudier le cas où PM et AC sont parallèles, en particulier de démontrer que la droite d'intersection est parallèle à SAC :